Kolokwium z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.

(*Ściśle tajne* przed godz. 12:15 22 maja 2024.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. Funkcja $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ ma miejsca zerowe -1 i $+2$. Do ich znalezienia została użyta metoda Newtona i metoda iteracji prostej z parametrem $\tau = \frac{1}{23}$. Znajdź wykładniki zbieżności tych metod do każdego z tych miejsc zerowych.

   Wskazówka: znajdź funkcje iteracyjne i zbadaj ich pochodne.

2. Macierz $A \in \mathbb{R}^{nk \times nk}$ ma strukturę blokową

$$A = \begin{bmatrix} T & H & \dots & H \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & T & H \\ 0 & \dots & 0 & T \end{bmatrix},$$

   przy czym wszystkie bloki mają wymiary $n \times n$. Blok T jest macierzą trójdiagonalną diagonalnie dominującą. Blok $H = I - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T$ jest określony przez dany wektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, którego norma druga jest równa 1.

   Podaj algorytm rozwiązywania układu równań liniowych z taką macierzą A, o złożoności obliczeniowej rzędu nk^2.

3. Metodą odbić Householdera rozwiąż liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, w którym

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

   Oblicz normę residuum dla znalezionego rozwiązania.

4. Asia, Besia i Cesia napisały (niezależnie) implementacje metody potęgowej, które zastosowane do pewnych rzeczywistych macierzy symetrycznych 4×4, z pewnymi wektorami początkowymi $x_0 \in \mathbb{R}^4$, dały następujące wyniki:

Implementacja Asi wytworzyła ciąg wektorów zbieżny do wektora $\frac{1}{\sqrt{15}}[1, 2, -3, 1]^T$.

Implementacja Besi wytworzyła ciąg wektorów, którego podciąg parzysty $(x_{2k})_{k \in N}$ jest zbieżny do wektora $\frac{1}{2}[1, 1, 1, -1]^T$, a podciąg nieparzysty $(x_{2k+1})_{k \in N}$ zbiega do $\frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$.

Implementacja Cesi wyznaczyła ciąg wektorów, którego podciąg parzysty jest zbieżny do wektora $\frac{1}{2}[-1, 1, 1, -1]^T$, a podciąg nieparzysty do $-\frac{1}{2}[-1, 1, 1, -1]^T$.

Wektor x_0 w każdym przypadku nie był prostopadły do żadnego wektora własnego macierzy użytej w eksperymencie.

Dla każdej z tych implementacji odpowiedz, czy z podanych wyżej informacji wynika, że na pewno jest w niej błąd. Jeśli nie można stwierdzić obecności błędu, to co można powiedzieć o tej macierzy? Każdą odpowiedź uzasadnij.